

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:....ÇÖZÜMLER.....

13.11.2017

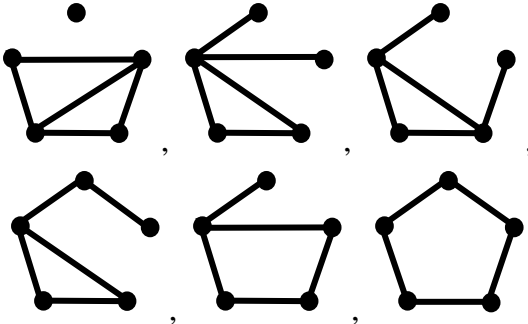
No :.....

**Soru 1)** 4 köşeli bir grafta tüm köşeler birbirine komşu ve tüm kenarlar birbirine komşu olabilir mi? Olabilirse bu graf(lar)ı çiziniz.

Tam graf dışındaki graflarda tüm köşeler birbirine komşu değildir. 4 mertebeli tam grafta ise tüm köşeler birbirine komşudur ama karşılıklı kenarlar ve köşegenler bir birine komşu değildir. O halde böyle bir graf bulunamaz.

**Soru 2)** Mertebesi ve boyutu 5 olan kaç adet graf mevcuttur? Hepsini çiziniz.

$m = n = 5$  olan 6 graf mevcuttur. Bunlar



şeklindedir.

**Soru 3)** Regüler ağaç bulunabilir mi? Açıklayınız.

Her ağaçta mutlaka derecesi 1 olan sallanan köşeler bulunur. Köşe sayısı iki olan bir ağacın iki köşenin derecesi de 1 olup regüler bir graftır. Köşe sayısı ikiden fazla ise bu ağaçta en az bir tane derecesi en az 2 olan köşe mevcuttur. Bu sebeple regüler olamaz. Regüler olan tek ağaç 2 köşeli olandır.

**Soru 4)**  $T_{r,s}$  larva grafının kutuplaşma sayısını ve bağımsızlık sayısını belirleyiniz.

$r = 3$  ise kutuplaşma sayısı 3, değilse 2'dir.

Bağımsızlık sayısı ise deneme yoluyla  $r$  ve  $s$  aynı anda tek ya da çift iken  $(r+s)/2$ ;  $r$  tek  $s$  çift iken  $\lfloor (r+s)/2 \rfloor$ ,  $r$  çift  $s$  tek iken  $\lfloor (r+s)/2 \rfloor + 1$  olur.

**Soru 5)** Derece dizisi  $\{7,6,6,4,4,3,2,1\}$  olan bir graf bulunamayacağını işlem yapmadan belirleyebilir misiniz? Açıklayınız.

Dereceler toplamı çift olmalıdır, ancak bu kümedeki derecelerin toplamı tek sayıdır. Dolayısıyla verilen küme, bir grafın derece dizisi olamaz.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. *inc+ay*

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI.....

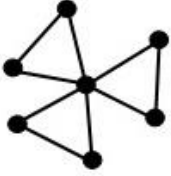
25.12.2017

No :.....

**Soru 1)**  $W_n$  tekerlek grafinin bağımsızlık sayısını hesaplayınız.

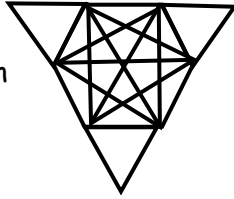
$W_n$  tekerlek grafi, bir  $S_n$  yıldız grafinin ardışık köşelerinin birer kenarla birleştirilmesiyle elde edilmiştir.  $W_n$ 'in bağımsızlık sayısı  $n=4$  için 1;  $n=5$  ve 6 için 2;  $n=7$  ve 8 için 3; ... şeklindedir. Yani devirli graflara benzer şekilde aranan sayının  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  olduğu görülür.

**Soru 2)**  $W_3^3$  yel değirmeni grafinin doğru grafini çiziniz.



$W_3^3$  yel değirmeni grafi yanda görülmektedir.  $L(W_3^3)$  doğru grafini elde etmek için her kenarın ortasına

birer köşe çizip bunlardan tüm komşu olanları birer kenarla birleştirmek gereklidir. Aranan graf yanda verilmiştir.



**Soru 3)** Bir ağaç Euler grafi olabilir mi? Açıklayınız.

Bir Euler grafinde tüm köşe dereceleri çift olmalıdır. Ancak bir ağaçta en az iki tane sallanan (derecesi 1 olan) köşe mevcuttur. Dolayısıyla hiçbir ağaç bir Euler grafi olamaz.

**Soru 4)**  $n$  mertebeli bir basit grafta  $n-1$  dereceli bir köşe varsa bu grafin bağlantılılığı hakkında ne söylenebilir?

$n$  mertebeli bir grafta  $n$  köşe mevcuttur. Bu köşelerden bir tanesinin derecesinin  $n-1$  olması bu köşenin diğer  $n-1$  köşeden her birisine komşu olduğunu gösterir. Bu da grafin bağlantılı olduğunu gösterir.

**Soru 5)** 12 köşeli olup 3 bileşeni de devirli graf olan kaç adet etiketlenmemiş graf çizilebilir?

$C_n$  devirli grafi  $n$  köşeli olduğuna ve  $n$  sayısının en az 3 olması gerektiğine göre 12 köşeyi her biri en az 3 köşeli olan 3 bileşene kaç şekilde paylaştırabileceğimize bakmalıyız. Bu da 4-4-4, 3-4-5 veya 3-3-6 şekillerinde olabilir. Yani 3 bileşen ya  $C_4-C_4-C_4$ , ya  $C_3-C_4-C_5$ , ya da  $C_3-C_3-C_6$  olabilir.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. inc+ay

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI.....

09.01.2018

No :.....

**Soru 1)** Mertebesi 5 olan bir basit grafın boyutu neler olabilir?

Boyut kenar sayısı olduğundan en az 0 olabilir.

Basit bir grafta kenar sayısı en çok  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

olabileceğinden kenar sayısı en çok 10 olabilir.

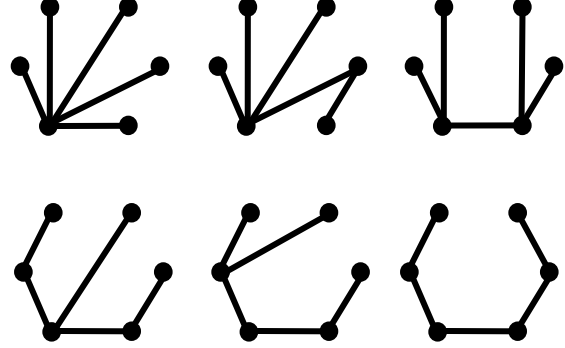
**Soru 2)** Her bir ağacın neden iki parçalı bir graf olduğunu açıklayınız.

Bir ağaçta herhangi iki köşe arasında tek bir patika olduğundan ve bu patikanın ardışık köşelerini siyah ve beyaz olarak renklendirebileceğimizden her bir ağaç iki parçalı bir graftır.

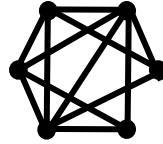
**Soru 3)** Regüler bir grafın doğru grafının regürlüğü hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

$G$  grafı  $r$  regüler bir graf olsun. Her bir köşenin derecesi  $r$ 'dir. Doğru grafın köşeleri  $G$  grafının kenarlarıdır.  $G$  grafındaki her bir kenarın derecesi  $2r-2$  olduğundan  $L(G)$  doğru grafının her bir köşesi eşit derecelidir ve  $L(G)$   $2r-2$  regüler olur.

**Soru 4)** Mertebesi 6 olan tüm ağaçları çiziniz.



**Soru 5)** Derece dizisi  $\{5,5,4,4,3,3\}$  olan kaç adet basit graf çizilebilir?



grafı dışında başka bir basit graf çizilemez.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. *inc+ay*

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI.....

30.11.2018

No :.....

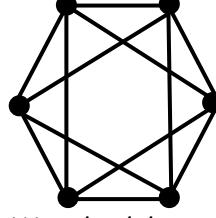
**Soru 1)**  $n$  köşeli tekerlek grafinin kutuplaşma sayısını formülleştirin.

*$n$  köşeli bir tekerlek grafta bulunabilecek en büyük tam grafin köşe sayısını arıyoruz. Bu da  $n = 1$  için 1;  $n = 2$  için 2;  $n = 4$  için 4;  $n = 3$  ve  $n > 4$  için 3'tür.*

**Soru 2)**  $W_n^m$  ile gösterilen yel değirmeni grafinin bağımsızlık sayısını formülleştirin

*$W_n^m$  yel değirmeni grafi  $K_n$  tam grafinin  $m$  tane kopyasının birer köşelerinin özdeşlenmesiyle oluşur. Her tam grafin bağımsızlık sayısı, tüm köşeler birbirine komşu olduğundan 1'dir. Dolayısıyla her bir tam graftan ortak köşe dışında birer köşe seçilirse olabilecek maksimum komşu olmayan köşe sayısı elde edilir. Bu da tam grafların sayısı kadardır, yani  $m$  tanedir.*

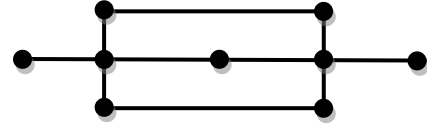
**Soru 3)**  $W_4$  tekerlek grafinin doğru grafinin çapını ve yarıçapını hesaplayınız.



*$W_4$  tekerlek grafinin doğru grafi şekildeki gibidir. Çap, grafin ikişer köşesi arasındaki uzaklıkların en büyüğüdür ve bu şekilde en büyük uzaklık 2 olduğundan grafin çapı 2'dir. Yarıçapı ise tüm köşeler merkezde olduğundan 0'dır.*

**Soru 4)** Köşe dereceleri 1,1,2,2,2,2,2,4,4 olan bir graf çizin.

*Öncelikle dereceler toplamı çift olduğundan graf çizilebilir. Bir çok şekilde çizilebilecek olan bu grafin bir çizimi aşağıdadır.*



**Soru 5)** Derece dizisi sadece tek sayılardan oluşan bir grafin köşe sayısı hakkında neler söylenebilir?

*Köşe dereceleri toplamının çift olması gerektiğini el sıkışma lemmasından biliyoruz. Tek sayıda tek sayı toplanınca tek sayı bulunacağından köşe sayısı mutlaka çift olmalıdır.*

Süre 70 dakikadır. Başarılar. **inc+ay**

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

24.01.2019

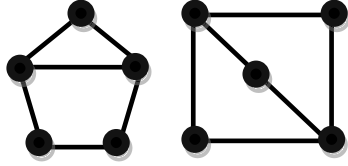
No :.....

**Soru 1)** 11 mertebeli ve 19 boyutlu bir grafta sadece derecesi 2, 4 ve 5 olan köşeler bulunmaktadır. 4 tane derecesi 2 olan köşe varsa derecesi 4 olan ve derecesi 5 olan kaç köşe vardır?

$x$  tane 4 dereceli köşe olsun. O halde  $11-(4+x) = 7-x$  tane de derecesi 5 olan köşe vardır. O halde köşe dereceleri toplamı kenar sayısının 2 katı olduğundan  $2 \cdot 19 = 38 = 4 \cdot 2 + x \cdot 4 + (7-x) \cdot 5$  eşitliğinden  $x=5$  elde edilir. Yani 5 tane derecesi 4 olan, 2 tane de derecesi 5 olan köşe mevcuttur.

**Soru 2)** Derece dizileri aynı olan 5 köşeli basit ve bağlantılı 2 graf çiziniz.

$T_{4,1}$  ve  $T_{3,2}$  larva graflarının derece dizileri  $\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(1)}\}$  şeklindedir. Benzer şekilde

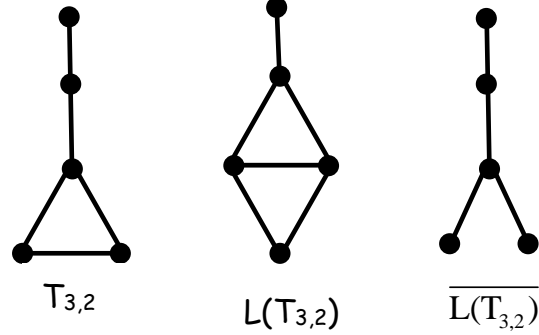


graflarının derece dizileri de  $\{2^{(3)}, 3^{(2)}\}$  şeklindedir.

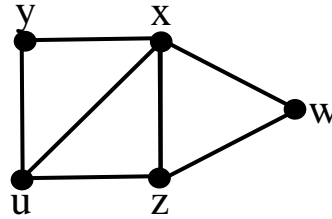
**Soru 3)** Tüm köşe dereceleri farklı olan bir grafın basit graf olamayacağını gösteriniz.

En büyük derece  $d$  ise tüm dereceler farklı olduğundan diğer dereceler 1, 2, 3, ...,  $d-1$  sayılarından bazıları ya da tümüdür. Yani en fazla  $d-1$  tane köşe daha vardır. Ama  $d$  dereceli köşeden  $d$  tane kenar çizmek gerekir. Bu da basit bir grafta mümkün değildir.

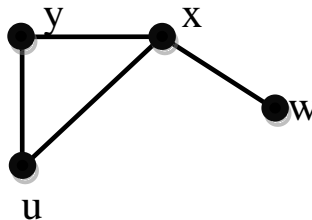
**Soru 4)**  $T_{3,2}$  larva grafının doğru grafının tümleyenini çiziniz.



**Soru 5)** Verilen  $G$  grafından bir köşe silinerek elde edilecek olan 5 grafın bağımsızlık sayıları neler olabilir?



5 köşenin herbiri çıkarılınca değişik graflar elde edilecektir ancak bu grafların herbirinin bağımsızlık sayısı 2 olur. Örneğin  $z$  köşesi silindiğinde elde edilen aşağıdaki grafta  $u$  ve  $w$  veya  $y$  ve  $w$  köşe çiftleri birer bağımsız kümedir.



Süre 70 dakikadır. Başarılar. *inc*

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad:.....

28.01.2019

No :.....

**Soru 1)** 4 tane derecesi 5 olan ve 2 tane derecesi 4 olan köşeye sahip bir graf çiziniz? Bu grafın regüler olması için kaç tane kenar eklenmelidir? Tümleyeni nedir?

6 köşeli bu grafa sadece 2 tane 4 dereceli köşe olup diğerleri 5 derecelidir. Yani bu iki köşe bir kenarla birleştirilirse 6 köşesi de 5 dereceli olan bir graf elde edilir. Bu da  $K_6$  tam grafıdır. Dolayısıyla bu grafın regüler olması için tek bir kenar eklenmesi yeterlidir. Tümleyeni de  $K_2$  tam grafı ile 4 tane izole köşeden oluşur.



**Soru 2)** Derece dizisi  $\{2^{(4)}, 4^{(2)}, 16^{(1)}\}$  olan bir graf çizilebilir mi? Bu derece dizisine sahip basit bir graf çizilebilir mi?

Dereceler toplamı çift olduğundan bu graf çizilebilirdir. Ancak derecesi 16 olan köşeden diğer köşelere birer kenar çizildiğinde toplam 6 tane kenar çizilebilir. Yani dereceyi 16'ya tamamlamak için katlı kenar veya döngülere ihtiyaç vardır. Yani basit graf olarak çizilemez.

**Soru 3)** Bir tam grafı bağlantısız hale getirmek için en az kaç kenar silinmelidir?

$K_n$  tam grafının her bir köşesinden  $n-1$  tane kenar çıkmaktadır. Bu grafı en az sayıda kenar silerek bağlantısız hale getirmek için bir köşeden çıkan tüm kenarları silmek gerekir. Yani  $n-1$  tane kenar silmek gerekir.

**Soru 4)**  $T_{3,1}$  larva grafının tümleyeninin derece dizisini yazınız ve regüler olup olmadığını belirleyiniz.

$T_{3,1}$  larva grafının tümleyeni  $P_3$  yol grafı ve bir izole köşeden oluşur. Yani derece dizisi  $\{0^{(1)}, 1^{(2)}, 2^{(1)}\}$  şeklindedir. Farklı dereceler olduğundan regüler değildir.

**Soru 5)** Merdiven graflarının kutuplaşma sayısını formülleştiriniz.

$L_n$  merdiven grafının, içiçe iki  $n$ -genin karşılıklı birer köşelerinden birleştirilmesiyle elde edilen bir graf olduğunu hatırlarsak  $L_3$  merdiven grafının bulundurduğu en büyük tam grafın  $K_3$  üçgeni olduğunu ve bu durumda kutuplaşma sayısının 3 olduğunu,  $n > 3$  için  $L_n$  merdiven grafının içiçe iki  $n$ -genden ve bunlar arasındaki bölgelerin de birer dörtgenden oluştuğunu ve bu graftaki en büyük tam grafın  $K_2$  olduğunu görürüz. Yani  $n > 3$  için kutuplaşma sayısı 2'dir.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. **inc**

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

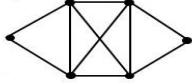
25.11.2019

No :.....

**Soru 1)**  $D_3^2$  dostluk grafının doğru grafını çiziniz ve köşe ve kenar sayılarını bulunuz.

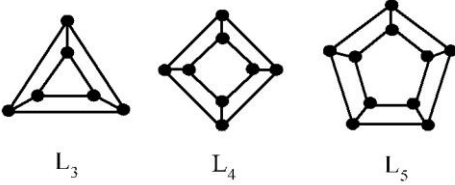


$D_3^2$  dostluk grafının doğru grafı



şeklinde dir. Köşe ve kenar sayıları da sırasıyla 6 ve 10 olur.

**Soru 2)**  $n > 2$  için  $L_n$  merdiven grafının bağımsızlık ve kutuplaşma sayılarını belirleyiniz.



$L_3$

$L_4$

$L_5$

Kutuplaşma sayısı  $n = 3$  iken 3,  $n > 3$  iken 2'dir. Bağımsızlık sayısı ise  $n$  tek iken  $n-1$ ,  $n$  çift iken  $n$ 'dir.

**Soru 3)** Her köşesi en az bir kenara bitişik olan ancak hiçbir kenarı bir diğer kenara komşu olmayan basit bir grafın mertebesi (köşe sayısı) neler olabilir?

Her köşe en az bir kenara bitişik ise izole nokta yok demektir. Hiçbir kenar bir başka kenara komşu değilse her bir köşeden bir tek kenar çıkıyor demektir. Yani tüm köşe dereceleri en az 1 ve en çok 1'dir. Bu da aranan basit grafın her bir köşe derecesinin tam 1 olduğunu gösterir. Böyle bir graf belli sayıda, diyelim ki  $k$  tane,  $K_2$  kenarından oluşur. Yani köşe sayısı  $2k$  olur. Bu da mertebenin çift sayı olduğunu gösterir.

**Soru 4)** Köşe dereceleri 1,1,1,1,2,2,2,2,2,4,14 olan bir basit graf çizilebilir mi? Açıklayınız ve çizilebilirse çiziniz.

Basit bir grafta 14 dereceli bir köşe varsa bu köşeden diğer köşelere 14 tane kenar mevcuttur. Basit graf olduğundan en az 14 köşe daha olmalıdır. Ancak toplam köşe sayısı 11 olduğundan böyle bir graf çizilemez.

**Soru 5)** Boyutu mertebesine eşit olan bağlantılı ve basit grafların ortak özellikleri nedir? Açıklayınız.

Ağaçlarda köşe sayısının kenar sayısından bir fazla olduğunu biliyoruz. O halde aranan grafı elde etmek için bir ağaca köşe sayısını arttırmadan yeni bir kenar eklemek gerekir. Bu da mevcut olan iki köşeyi birleştirmek anlamına gelir. Böyle bir birleştirme sonucunda grafta bir kapalı bölge oluşur. Yani mertebesi boyutuna eşit olan bir graf tek bir kapalı yüze sahip olan graflardır.  $C_n$  ve  $T_{r,s}$  grafları gibi.

Süre 70 dakikadır. Başarılar.

inc

# MAT 4095 GRAF TEORİYE GİRİŞ FINAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

16.01.2020

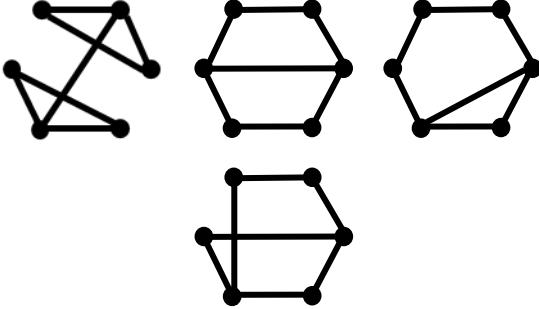
No :.....

**Soru 1)**  $n$  köşeli bir  $G$  basit grafında  $G'$  tümleyen grafının kenar sayısı,  $G$  grafının kenar sayısına eşit ise  $n$  hakkında ne söylenebilir?

$G$  ve  $G'$  graflarının kenar sayıları  $m$  ve  $m'$  olsun.  $m = m'$  olduğu veriliyor.  $G$  ve  $G'$  graflarında toplam  $n(n-1)/2$  tane kenar olduğunu biliyoruz. O halde  $m+m' = 2m = n(n-1)/2$  olmalıdır. Buradan  $n^2 - n - 4m = 0$  denklemi elde edilir.  $\Delta = 1+16m$  olup  $n$ 'in tamsayı olabilmesi için  $1+16m$  sayısının bir tek tam kare olması gerektiğini buluruz.  $1+16m=k^2$  dersek  $k^2 \equiv 1 \pmod{16}$  ve buradan  $k \equiv \pm 1 \pmod{8}$  elde edilir. Buradan da  $n \equiv 0$  veya  $1 \pmod{4}$  elde edilir.

**Soru 2)** Derece dizisi  $\{2,2,2,2,3,3\}$  olan kaç tane bağlantılı basit graf çizilebilir? Çiziniz.

4 tane çizilebilir:



**Soru 3)** Derece dizisi sadece tek sayılardan oluşan bir graf olabilir mi? Örnek vererek açıklayınız.

Dereceler toplamı çift olmalıdır. Yani derece dizisi tek sayılardan oluşacaksa çift sayıda eleman bulundurulmalıdır. Bu şartı sağlayan sonsuz çoklukta derece dizisi bulunur. Birkaç tanesi  $\{1,1\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{1,3,3,5\}$ ,  $\{3,3,5,7,7,11\}$  şeklindedir.

**Soru 4)** Tümleyenine eşit olan 4 mertebeli bir graf bulunuz.

$P_4$  patika grafının tümleyeni kendisidir.

**Soru 5)** İki bileşenli bir  $G$  grafının her bileşeni bir tam graf olsun. Bileşenlerin kenar sayılarının oranı 3 olsun.  $G$ 'nin mertebesini hesaplayınız.

Bileşenler  $K_n$  ve  $K_m$  olsun. Kenar sayıları sırasıyla  $n(n-1)/2$  ve  $m(m-1)/2$  olur. O halde

$$(n^2-n)/2 = 3(m^2-m)/2$$

yazılabilir. O halde  $n^2-n = 3(m^2-m)$  eşitliğinden deneme yoluyla  $(n,m) = (3,2)$  veya  $(10,6)$  bulunur. Dolayısıyla  $G$ 'nin mertebesi  $n+m = 5$  veya  $16$  olur.

Süre 70 dakikadır. Başarılar.

inc